Comonotoniciteit als Risk Man

J. Dhaene, M. J. Goovaerts, S. Vanduffel en C. Van Hulle

De theorie van comonotoniciteit vormt een praktische toolkit om allerhande financiële en actuariële beslissingsproblemen inzake optie-waardering, het bepalen van provisies of vereist kapitaal, het opstellen van optimale assetmixen in het kader van de personal finance problematiek, enz. op een eenvoudige manier te behandelen. De theorie over comonotoniciteit zoals hier zal worden uiteengezet, geeft elegante en uiterst nauwkeurige antwoorden op de relevante vragen die bij dergelijke problemen gesteld zullen worden. Een hedendaagse portable laat toe deze antwoorden te vinden binnen een tijdspanne van enkele seconden. Dergelijke problemen zouden ook via simulatie kunnen opgelost worden. Maar deze oplossingsmethode leidt vaak tot lange berekeningstijden en is niet flexibel genoeg.

Hoe efficiënt aan risicobeheer doen ?

Comonotone benaderingen helpen !

Vele moderne financiële en actuariële vraagstukken vereisen het gelijktijdig omgaan met meerdere kansvariabelen. Vaak dient dan uitspraak te worden gedaan over een probleem waarbij deze kansvariabelen op één of andere manier worden gesommeerd. Een vorm die hierbij veelvuldig voorkomt betreft de volgende stochastische som

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; e^{Z_i}$$

Hierbij zijn de α_i reële getallen en Z_i normaal verdeelde variabelen. Voorbeelden van een dergelijke som liggen voor de hand. Beschouwen we vooreerst het probleem van het 'sparen voor een pensioen' en het zoeken naar de bijhorende optimale beleggingsstrategie. De opgerente waarde (op pensioenleeftijd) van een reeks toekomstige spaarbedragen α_i (gedurende de actieve periode) die belegd worden in een of ander beleggingsfonds, kan uitgedrukt worden als een som S van het type (1). Hierbij dienen de Z_i geïnterpreteerd te worden als de onzekere (jaarlijkse) rendementen over de respectievelijke periodes [*i, n*].

Ook het oplossen van de vraag welk bedrag men op pensioenleeftijd dient ter beschikking te hebben teneinde periodieke pensioenuitkeringen α_i te garanderen, zonder daarbij het risico te lopen om zijn 'geld te overleven', geeft aanleiding tot een kansvariabele S van het type (1). Stelt men bijvoorbeeld dat de kans dat men zijn geld overleeft maximaal 1 procent mag zijn, dan kan men aan de hand van de verdeling van S het op pensioenleeftijd vereist bedrag bepalen dat ervoor zorgt dat er 99% kans is dat alle pensioenuitkeringen zullen kunnen verricht worden met dit gereserveerde bedrag. De optimale beleggingsstrategie zou dan kunnen gekozen worden als degene die het op zij te zetten bedrag op pensioenleeftijd minimaliseert, gegeven de vereiste kans van 99%.

Het berekenen van provisies en de bijhorende vereiste solvabiliteits- kapitalen in het kader van een modern risicomodel binnen de verzekerings- of bancaire context vereist eveneens het bepalen van kansen behorend bij kansvariabelen van het type (1).

Ook bij het bepalen van prijzen van Aziatische en Basket opties duiken sommen van het type (1) op. Inderdaad, bij een Aziatische optie vergelijkt men op het moment dat de optie uitgeoefend wordt, de uitoefenprijs met de gemiddelde prijs (over een aantal dagen voor de uitoefendatum) van het onderliggende aandeel. Bij een Basket optie vergelijkt men de uitoefenprijs met de gemiddelde prijs van een korf van onderliggende waarden. In beide gevallen treedt er dus een som op van (min of meer sterk) afhankelijke kansvariabelen Een andere belangrijke toepassing betreft de ALM-problematiek bij pensioenfondsen.

In ieder van de bovenvermelde toepassingen komt het er in feite telkens op neer dat we voor een som van het type (1) een gepaste *risicomaat* dienen te bepalen. Dergelijke risicomaten concentreren zich meestal op het risico dat in de 'staarten' van de kansverdeling besloten ligt. Afhankelijkheid van het toepassingsgebied wordt een percentiel of Value-at-Risk gebruikt (bijvoorbeeld een value-at-risk van 1% beschouwt dit niveau van uitkomst zodanig dat er een kans van 1% bestaat dat de uiteindelijke waarde van de kansvariabele S nog lager zal uitvallen), een optiepremie of een expected shortfall. Dergelijke risicomaten zijn een erg waardevol hulpmiddel in het hele beslissingsgebeuren. Ze vatten immers de informatie over het risico S samen in één enkel getal ρ [S]. Merk hierbij op dat de in de literatuur gangbare veronderstelling dat de Z_i een normale kansverdeling volgen, vaak in overeenstemming zal zijn met empirische waarnemingen, tenminste voor rendementen over voldoende lange periodes. Vele van onze resultaten kunnen echter uitgebreid worden naar ruimere klassen van kansverdelingen.

Comonotone benaderingen

Bij de hierboven vermelde toepassingen treedt een kansvariabele op van het type (1). De termen die voorkomen in deze som zullen meestal een sterke positieve afhankelijkheid vertonen. Er is immers een sterke overlapping wanneer we verdisconteren (of oprenten) over de beschouwde tijdsperioden: de return over een periode van elf jaar is gelijk aan de return over een periode van tien jaar samen met de return in het elfde jaar. Spijtig genoeg is de kansverdeling van de variabele S zodanig complex dat de meeste risicomaten van de som S niet analytisch bepaald kunnen worden. In de praktijk zou dit dan kunnen opgevangen worden door een benadering via simulatie. Echter, gegeven de ingewikkeldheid van de moderne risicomodellen waarin dergelijke variabele S vaak voorkomt, blijft dergelijke simulatie, ondanks de huidige computerrekencapaciteit uitermate tijdrovend. Een mogelijk alternatief bestaat er dan in om de exacte kansverdeling van S te vervangen door een andere, die gemakkelijker hanteerbaar is en tegelijkertijd de werkelijke kansverdeling, zeker in de staarten, voldoende dicht benadert.

De idee van de comonotone benadering bestaat erin de juiste afhankelijkheidsstructuur die de kansvariabelen Z_i tot elkaar vertonen, te vervangen door een andere afhankelijkheidsstructuur die de berekeningen eenvoudiger maakt. Wanneer die benaderende (eenvoudiger) afhankelijkheidsstructuur nu zo gekozen wordt dat hierdoor de som S 'gevaarlijker' wordt, dan kan men verwachten dat het nemen van beslissingen gebaseerd op de gevaarlijker som, aanleiding zal geven tot veilige, conservatieve beslissingen. Vanuit het oogpunt van het risicobeheer is dit een goede zaak.

We moeten uiteraard eerst afspreken wat we met 'gevaarlijker' precies bedoelen. Dat wil zeggen dat we moeten definiëren hoe we risico's rangschikken in termen van 'gevaarlijkheid'. We gebruiken hiertoe het in de economische literatuur vaak gebruikte concept van convexe ordening. We vervangen dus de afhankelijkheidsstructuur tussen de Z_i door een andere afhankelijkheidsstructuur die zodanig gekozen is dat hierdoor de percentielen gemakkelijker berekend kunnen worden maar die ook zo is dat de benaderde som S 'gevaarlijker' is in convexe orde dan de exacte som. Dit betekent dat risicomijdende beslissingsnemers de exacte som zullen verkiezen boven de benadering ervan. Praktisch betekent dit dat de 'staarten' van de verdeling dikker zullen zijn zodat de kans op extreme uitkomsten toenemen. De 'gevaarlijkste' of meest conservatieve som zal optreden wanneer de kansvariabelen $\alpha_i e^{Z_i}$ comonotoon zijn. Dit wil zeggen dat ze alle functie worden van dezelfde kansvariabele zodanig dat ze steeds in dezelfde richting bewegen. Dit verklaart ook het woord comonotoniciteit (common monotonic). Het gebruik van deze comonotone bovengrenskansvariabele, genoteerd met S^c, leidt niet alleen tot het nemen van voorzichtige beslissingen, maar heeft eveneens het

Optimale beleggingsstrategieën

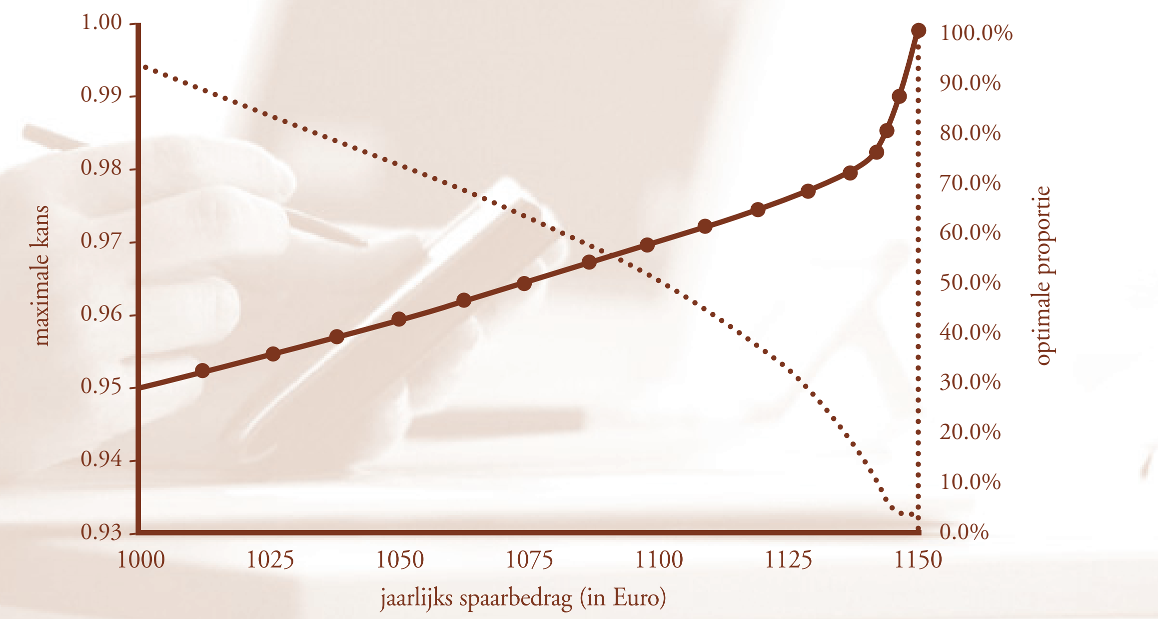


Figure 1: De grafiek toont in functie van de jaarlijkse spaarbedragen, de maximale kansen (volle lijn - linkerschaal) om het doelkapitaal van 90,000 Euro te halen, met telkens de optimale proporties belegd in de risicovolle portefeuille (stippellijn - rechterschaal).

zeer belangrijke voordeel dat de meeste risicomaten zeer eenvoudig en analytisch kunnen bepaald worden en men dus geen beroep moet doen op tijdrovende simulaties. De reden voor deze mathematische eenvoud schuilt in het feit dat de comonotone benaderingen het oorspronkelijke probleem met meerdere kansvariabelen Z_i vervangt door een probleem met één kansvariabele.

Het gebruiken van de comonotone bovengrens S^c is dus een veilige, conservatieve strategie. Maar deze zal over het algemeen leiden tot relatief hoge provisies, en relatief conservatieve beleggingsstrategieën. Daarom heeft het ook zin om de exacte som S te vervangen door een benedengrens S^l, een kansvariabele die de risico's onderschat. Wiskundigtechnisch wordt deze kansvariabele S^l bekomen door de conditionele verwachting $E[S \mid \Lambda] = \Sigma_{i=0}^{n} \ \alpha_i \ E[e^{Z_i} \mid \Lambda]$ met betrekking tot een conditioneringsvariabele Λ te bepalen. Indien de termen $E[e^{Z_i} \mid \Lambda]$ monotone functies zijn van Λ, alle stijgend of alle dalend, vinden we, net zoals in het geval van de comonotone bovengrens, een comonotone som waarvan opnieuw de verschillende relevante grootheden eenvoudig bepaald kunnen worden.

Zich baseren op het minder gevaarlijke risico S^l in plaats van het meer gevaarlijke S^c, gaat in tegen de intuïtie van de risicomijdende beslissingsnemer. Uitgebreide numerieke testen hebben echter uitgewezen dat de risicomaten van S^l, in de

agement instrument

praktijk zeer dicht liggen bij de exacte (via uitgebreide simulaties bekomen) risicomaten van de originele variabele S, op voorwaarde dat een 'optimale' keuze gemaakt wordt voor de conditioneringsvariabele Λ. De beslissingsnemer (actuaris, belegger) moet dan oordelen of het criterium van 'nauwkeurigheid' zwaarder weegt dan het criterium van 'voorzichtigheid' en dat hij dus toch de minder voorzichtige benedengrens S^l zal nemen, zelfs al leidt deze tot het nemen van iets meer risico. Nogmaals, het gebruik van de ondergrens S^l geeft aanleiding tot resultaten die eens grafisch voorgesteld, met het blote oog niet onderscheidbaar zijn van resultaten bekomen met tijdrovende simulatie.

Optimale beleggingsstrategieën

Zoals in de inleiding vermeld, kunnen de comonotone benaderingen onder andere gebruikt worden om meerperiode-portefeuille-selectieproblemen zoals het spaarprobleem, het renteniersprobleem alsook het algemene spaar-renteniersprobleem, aan te pakken. Portefeuille selectie komt neer op het bepalen van de optimale asset mix en dit voor een gegeven risicoprofiel en een welbepaald consumptie- en/of spaarpatroon. De belegger kan hierbij kiezen uit risicovolle activa zoals aandelen, vastgoed en obligaties maar ook uit (quasi-) risicoloze beleggingen zoals cash of money-market instrumenten. Hij bepaalt dan de initiële percentages die hij in elk van deze activa zal beleggen, evenals een specifieke strategie volgens dewelke hij in de toekomst activa zal kopen en verkopen.

Laat ons ter illustratie veronderstellen dat de beslissingsnemer zodanig handelt dat hij de initiële beleggingspercentages in de diverse beleggingsinstrumenten constant houdt. We bepalen dan, gegeven deze zogenaamde 'constante mix' strategie, de voor hem optimale percentages waarin hij dient te beleggen.

Neem aan dat deze beslissingsnemer wordt geconfronteerd met het hierna volgende *spaarprobleem*. Hij wenst op regelmatige tijdstippen 0, 1, ... , $n — 1$, (bijvoorbeeld maandelijks, tot aan pensioenleeftijd) een vaste bedrag α te sparen. Zijn einddoel is ervoor te zorgen dat het bijeengespaard bedrag op einddatum n, minstens even groot zal zijn als een welbepaald doelkapitaal K dat nodig is om een mooie oude dag te beleven.

De optimale beleggingsstrategie is dan diegene waarvoor de kans p om dit doel te bereiken zo groot mogelijk is. Onder de voorwaarde dat er geen beleggingsbeperkingen vooropgesteld zijn, kan men aantonen dat de optimale mix kan uitgedrukt worden als een mix van twee portefeuilles: een risicodragende portefeuille (waarbij alleen in risicodragende assets belegd wordt) en een risicovrije belegging. Merk echter op dat het probleem eveneens oplosbaar is in de meer realistische veronderstelling van beperkingen op de beleggingsproporties.

We zullen verder ook aannemen dat een risicoloze belegging 3% op jaarbasis opbrengt. Het jaarlijks verwacht rendement op de risicodragende portefeuille bedraagt 8.1%, terwijl het werkelijk rendement met een kans van 2 op 3 tussen -5% en +21% ligt (Technisch: de jaarlijkse returns zijn onderling onafhankelijk, lognormaal verdeeld met parameters θ = 7,8% en σ = 12,6%).

Beschouwen we nu het geval van een 25-jarige pensioenspaarder die een doelkapitaal van 90,000 Euro voor ogen heeft. Dit is het bedrag dat hij op zijn 65-ste verjaardag hoopt bijeen te sparen om zo zijn wettelijk pensioen en de uitkering van zijn groepsverzekering aan te vullen. Op de X-as van de grafiek wordt het jaarlijkse spaarbedrag (in Euro) uitgezet. De volle lijn op de grafiek geeft via de linkerschaal de maximale kans p aan om het doelkapitaal van 90,000 Euro te halen in functie van het jaarlijkse spaarbedrag. De stippellijn toont via de rechterschaal de optimale proportie die in de risicodragende portefeuille belegd dient te worden. De grafiek leert ons dat als hij jaarlijks 1000 Euro spaart, hij zijn kansen om het doelkapitaal te halen maximaal 95% kan maken en dat dit precies gebeurt wanneer hij 92% van dit jaarlijkse spaarbedrag in de risicodragende portefeuille belegt en de overige 8% in de risicoloze belegging. Indien hij meer kan sparen, zal hij natuurlijk zijn kansen op succes vergroten. Zo zal bij een jaarlijks spaarbedrag van 1,100 Euro hij al een kans van iets meer dan 97% bekomen omzijn appeltje voor de dorst waar temaken. Met andere woorden, door 10% meer te beleggen (maar in een andere optimale mix), halveert hij zowat zijn risico om zijn uiteindelijk doel niet te raken.

De in de grafiek gerapporteerde berekeningen werden uitgevoerd met behulp van de comonotone benedengrenzen en kunnen in een fractie van een seconde bekomen worden. Zij werden ook nog afgetoetst met behulp van simulatie op de werkelijke kansverdeling. De alzo bekomen "werkelijke" curve, is met het blote oog niet te onderscheiden van diegene bekomen met de comonotone benadering. Overigens kan een heel scala van andere personal finance problemen eveneens efficient en elegant opgelost worden met de aan de K.U.Leuven ontwikkelde 'comonotone' techniek.

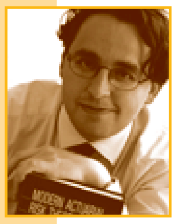
Besluit

In financiële en actuariële wetenschappen wordt men vaak geconfronteerd met stochastische sommen van het type $S = \Sigma_{i=1}^{n} \ X_i$, waarvan de kansverdeling niet gekend of niet makkelijk hanteerbaar is. Dank zij de theorie van de comonotoniciteit herleidt het multivariate stochastische karakter van deze som zich essentieel tot een univariaat gegeven. In ons onderzoek tonen we hoe dit ons helpt om een aantal (in de praktijk veel gebruikte) risicomaten van deze som zeer efficient en accuraat te kunnen benaderen. Deze resultaten kunnen gebruikt worden om een aantal belangrijke risicobeheerproblemen gemakkelijk op te lossen. Toepassingen situeren zich op het vlak van optimale beleggingsstrategieën in verband met reservering en sparen, evenals op het vlak van het prijzen en hedgen van complexe financiële instrumenten.

Een gedeelte van de theorie die aan de basis ligt van de comonotone benadering evenals haar toepassingen werden reeds gepubliceerd in *Insurance: Mathematics & Economics, The Journal of Risk and Insurance* en *The Journal of Pension Economics and Finance*, zie onderstaande lijst. De papers kunnen gedownload worden via 'www.kuleuven.ac.be/insurance'. Deze theorie werd ontwikkeld binnen een OT- en een GOA-project van K.U.Leuven en dit in samenwerking met de actuariële divisie van K.U.Leuven R&D. Diverse praktijktoepasingen zijn reeds geïmplementeerd geworden door de K.U.Leuven spin-off VACS.


Jan Dhaene ***is als hoogleraar verbonden aan het AFI Leuven Research Center van het departement Toegepaste Economische Wetenschappen van de K.U.Leuven***
jan.dhaene@econ.kuleuven.be


Marc Goovaerts ***is als gewoon hoogleraar verbonden aan het AFI Leuven Research Center van het departement Toegepaste Economische Wetenschappen van de K.U.Leuven***
marc.goovaerts@econ.kuleuven.be


Steven Vanduffel ***is als wetenschappelijk medewerker verbonden aan het AFI Leuven Research Center van het departement Toegepaste Economische Wetenschappen van de K.U.Leuven***
steven.vanduffel@econ.kuleuven.be


Cynthia Van Hulle ***is als gewoon hoogleraar verbonden aan het AFI Leuven Research Center van het departement Toegepaste Economische Wetenschappen van de K.U.Leuven***
cynthia.vanhulle@econ.kuleuven.be

Referenties:

- Dhaene, J.; Denuit, M.; Goovaerts, M.; Kaas, R.; Vyncke, D. (2002a). "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory", *Insurance: Mathematics & Economics* 31(1), 3-33.
- Dhaene, J.; Denuit, M.; Goovaerts, M.; Kaas, R.; Vyncke, D. (2002b). "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications", *Insurance: Mathematics & Economics* 31(2), 133-161.
- Dhaene, J.; Vanduffel, S.; Tang, Q.; Goovaerts, M.J.; Kaas, R.; Vyncke, D. (2004a). "Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review", available on-line at www.kuleuven.ac.be/insurance, publications.
- Dhaene, J.; Vanduffel, S.; Goovaerts, M.J.; Kaas, R.; Vyncke, D. (2004b). "Comonotonic approximations for optimal portfolio selection problems", *Journal of Risk and Insurance*, to be published, available on-line at www.kuleuven.ac.be/insurance, publications.
- Goovaerts M., Dhaene J., De Schepper A. (2000). "Stochastic upper bounds for present value functions", *The Journal of Risk and Insurance*, 67(1), 1-14.
- Hoedemakers T., Beirlant J., Goovaerts M., Dhaene J. (2003). Confidence bounds for discounted loss reserves. Insurance: Mathematics & Economics, 33(2), 297-316.
- Kaas R., Dhaene J., Goovaerts M.J. (2000). "Upper and lower bounds for sums of random variables", *Insurance: Mathematics & Economics* 27, 151-168.
- Simon S., Goovaerts M.J., Dhaene J. (2000). "An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option", *Insurance: Mathematics & Economics*, 26(2-3), 175-184.
- Vanduffel S., Dhaene J., Goovaerts M, Kaas R. (2003). "The hurdle-race problem", *Insurance: Mathematics & Economics*, 33(2), 405-414.
- Vanduffel, S., Hoedemakers, T. & Dhaene, J. (2004). "Comparing approximations for sums of non-independent lognormal random variables", Research Report OR 0418, Department of Applied Economics, K.U.Leuven
- Vanduffel, S., Dhaene J. & Goovaerts M. (2004). "On the evaluation of saving consumption plans", *Journal of Pension Economics and Finance*, to be published.